GÉOMÉTRIE

DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENT : 2

N. B. — *Les diverses questions sont, dans une large mesure, indépendantes l'une de l'autre et le candidat peut, à condition de l'indiquer clairement, admettre certains résultats fournis par l'énoncé et les exploiter pour résoudre la suite du problème.*

Dans un plan P affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ à tout point m de coordonnées x et y on associe son affixe, le nombre complexe $z = x + iy$. Soient A et A′ les points d'affixes respectives $+1$ et -1.

Le problème a pour objet l'étude de quelques transformations ponctuelles du plan P et le tracé de certaines courbes définies à partir de ces transformations.

PREMIÈRE PARTIE

On considère l'application t qui, à tout nombre complexe différent de -1, fait correspondre le nombre complexe :

$$z' = t(z) = \frac{z-1}{z+1}. \qquad (1)$$

Soit T la transformation ponctuelle qui à tout point m de P, distinct de A′ et d'affixe z, fait correspondre le point m' d'affixe z'.

1° Quel est l'ensemble $T(P - \{A'\})$, image par T du plan P privé du point A′?

Montrer que T est une bijection de $P - \{A'\}$ sur $T(P - \{A'\})$ et expliciter l'application réciproque T^{-1}.

2° Soit P* le plan P privé des points O, A et A′ et $\mathfrak{T}$ la restriction de T à P*.

a. Montrer que $\mathfrak{T}$ est une bijection de P* sur P*.

b. Définir les transformations composées $\mathfrak{T}^2$, $\mathfrak{T}^3$, $\mathfrak{T}^4$ et plus généralement $\mathfrak{T}^n$, n étant un entier naturel au moins égal à 2.

c. Quelle est la structure de E, ensemble des applications

$$\{\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^2, \mathfrak{T}^3, \mathfrak{T}^4\}$$

muni de la composition des applications?

3° Montrer que T admet deux points doubles I et J et prouver que, pour tout nombre complexe z différent de $-i$, la relation (1) peut se traduire par :

$$\frac{z'-i}{z'+i} = -i\,\frac{z-i}{z+i} \cdot \qquad (2)$$

a. Retrouver ainsi l'expression de la transformation $\mathfrak{T}^n$ lorsque n est un entier naturel multiple de 4.

b. Lorsque le point m n'est ni en I, ni en J, comparer les mesures des angles orientés de vecteurs $(\overrightarrow{m'J}, \overrightarrow{m'I})$ et $(\overrightarrow{mJ}, \overrightarrow{mI})$.

En déduire l'image par T d'un cercle passant par I et J. Cas particulier du cercle de diamètre IJ.

DEUXIÈME PARTIE

Soit φ l'application de **C** dans lui-même définie par $\varphi(z) = z^2$ et f l'application qui à tout nombre complexe non nul fait correspondre le nombre complexe :

$$Z = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \cdot$$

On désigne par Φ et F les transformations ponctuelles associées à φ et f.

1° Montrer que la restriction de F au plan P privé des points O et A′ coïncide avec l'application composée :

$$T^{-1} \circ \Phi \circ T.$$

(on dit que F est la transmuée de la transformation Φ par la transformation T).

2° En exploitant la relation : $T \circ F = \Phi \circ T$ déterminer le transformé d'un cercle passant par A et A′. Faire une figure dans le cas du cercle centré au point I.

Examiner le cas particulier du cercle de diamètre AA′.

3° Déterminer les coordonnées cartésiennes du point M d'affixe Z en fonction de celles du point m.

4° Lorsque m décrit la droite d'équation $x = 1$, le point M appartient à une courbe C dont on donnera une représentation paramétrique.

Construire la courbe C.

5° Lorsque m décrit le cercle de diamètre OA, le point M appartient à une courbe Γ.

a. Déterminer l'équation cartésienne de la courbe Γ, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b. Montrer que Γ passe par A et donner son équation cartésienne dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

c. On désigne par (ρ, θ) un système de coordonnées polaires, le point A étant choisi pour pôle et $(A, \vec{i})$ étant l'axe polaire. Montrer que Γ admet alors pour équation polaire :

$$\rho = -\frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta} \cdot$$

d. Construire la courbe Γ.

6° On veut que le point M appartienne à la droite d'équation cartésienne, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $Y = X - 1$.

Le point m doit alors appartenir à une courbe (l).

a. Déterminer les équations cartésiennes de (l) dans les repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$ puis $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

b. A étant le pôle et $(A, \vec{i})$ l'axe polaire, montrer que (l) admet pour équation polaire :

$$\rho = \frac{\cos 2\theta - \sin 2\theta}{\sin\theta - \cos\theta} \cdot$$

c. Étudier le signe de ρ en fonction de θ et préciser l'allure de (l) au voisinage du point A.

d. Étudier les branches infinies de (l).

e. Donner l'allure de la courbe (l).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail